

Konzervdobozok dobozolása

Szekció: középiskola, speciális matematikai tagozat

Juhász Péter: Hogyan fordítsunk meg egy létrát az udvaron?

című előadása ihlette, de közvetlenül nem kapcsolódik az ott elhangzottakhoz

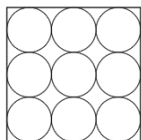
Grallert Krisztina

Földes Ferenc Gimnázium

grallertk@ffg.hu

A dolgozatban egy olyan probléma szerepel, amely megfogalmazása nagyon egyszerű, bizonyos esetekben a válasz megadásához kevés matematikai ismeret szükséges (Pitagorasz-tétel, körökkel kapcsolatos egyszerű ismeretek, esetleg szögfüggvények), de a pontos bizonyítás nehéz vagy még nem is ismert. Jó lehetőséget kínál viszont arra, hogy egyszerűbb esetekben a diákok próbálkozzanak és a számolások során alapvető geometriai ismereteiket használják.

A feladat: egyforma, körhenger alakú konzervdobozokat kell egy kartondobozba bepakolni. A kartondoboz alaplappja négyzet. Példaként nézzük 9 konzervdoboz esetét. A hengerek sugara r .

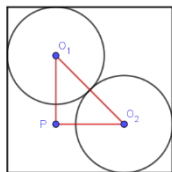


Az ábrán látható elrendezés esetén a kartondoboz alaplappja egy $3 \cdot 2r = 6r$ oldalú négyzet.

Mi a helyzet más számú konzervdoboz esetén?

Legyen a dobozok száma $n = 1$. Ekkor a szükséges kartondoboz alaplappja egy $2r$ hosszúságú négyzet.

$n = 2$



Kihasználjuk, hogy az érintkező körök középpontjainak távolsága a sugarak összege, valamint a négyzet átlója az oldalhossz $\sqrt{2}$ -szerese. $PO_2 = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$. A négyzet oldalhossza $2r + r\sqrt{2} = r(2 + \sqrt{2})$

Könnyű meghatározni a kartondoboz oldalhosszát négyzetszámnyi konzervdoboz esetén. Ha $n = 4$, a négyzet oldalhossza $4r$, ha $n = 16$, a négyzet oldalhossza $8r$, általában n^2 db konzervdoboz esetén az oldalhossz $2nr$.

A körpakolási probléma: köröket (egyenlő vagy eltérő sugarú) kell egy sokszög belsejében elhelyezni úgy, hogy a köröknek nem lehet közös belső pontja, azaz érinthetik, de nem metszhetik egymást. Kereshetjük azt az elhelyezést, amikor a sokszög oldalhosszai a lehető legkisebbek (ezzel foglalkozunk részletesebben a továbbiakban), vagy a lehető „legsűrűbb” elhelyezést, amikor a

$\frac{\text{körök összterülete}}{\text{sokszög területe}}$ hányados a lehető legnagyobb. (Példaként: 9 konzervdoboz előbbi elhelyezése

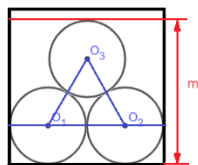
estén a sűrűség $\frac{9r^2\pi}{36r^2} = \frac{\pi}{4}$.)

Négyzet alapú kartondoboz

Négyzet alapú kartondobozba helyezünk adott számú konzervdobozt és a szükséges legkisebb négyzet oldalhosszát keressük. A konzervdobozok számát n , sugarát r jelöli. Az $n = 1$ illetve $n = 2$ esetekkel készen vagyunk.

$n = 3$ esetén az első ötlet:

A négyzet oldalhossza $r + 2r + r = 4r$. A középpontok által alkotott szabályos háromszög



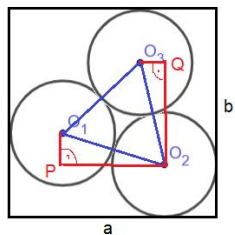
magassága $r\sqrt{3}$, így az ábrán m -mel jelölt szakasz

$$m = r + r\sqrt{3} + r = r(2 + \sqrt{3}) < 4r, \text{ így befér a négyzetbe.}$$

Van-e ennél jobb elhelyezés, azaz lehet-e $4r$ -nél kisebb a négyzet oldala?

Billentsük el a három páronként érintkező kört.

Legyen PO_2 párhuzamos a négyzet a oldalával és $\angle PO_2O_1O_2 = \alpha$



O_1O_2P derékszögű háromszögben $O_2P = 2r \cdot \cos \alpha$, a négyzet oldalhossza

$$a = 2r + 2r \cdot \cos \alpha$$

O_2O_3Q derékszögű háromszögben $O_3O_2Q = 90^\circ - 60^\circ - \alpha = 30^\circ - \alpha$,

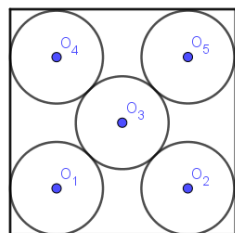
$$O_2Q = 2r \cdot \cos(30^\circ - \alpha), b = 2r + 2r \cdot \cos(30^\circ - \alpha).$$

A doboz alaplapja négyzet, ezért $a = b$, ebből $\cos \alpha = \cos(30^\circ - \alpha)$. α hegyesszög, tehát

$$\alpha = 30^\circ - \alpha, \text{ így } \alpha = 15^\circ. \text{ A négyzet oldala } a = 2r + 2r \cdot \cos 15^\circ = r \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) < 4r,$$

valóban jobb elrendezés.

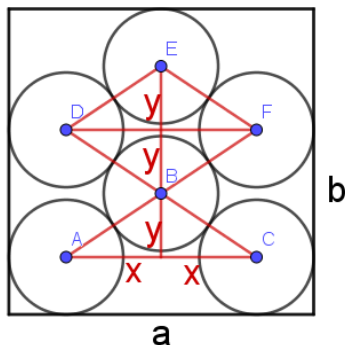
$n = 5$ esetén a legjobb elrendezés:



Az elrendezés szimmetriája miatt $O_1O_2O_5O_4$ négyzet. Kihhasználjuk, hogy az érintkező körök középpontjainak távolsága a sugarak összege, valamint a négyzet átlója az oldalhossz $\sqrt{2}$ -szerese.

$$\text{A négyzet oldalhossza } 2r + 2r\sqrt{2} = 2r(1 + \sqrt{2}).$$

$n = 6$ esetén a legjobb elrendezés:



Az elrendezés a BE egyenesre szimmetrikus. Az ábra jelöléseivel:
 $a = 2r + 2x$, $b = 2r + 3y$. A doboz alaplappja négyzet, így $a = b$,
 ebből $2x = 3y$. A Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

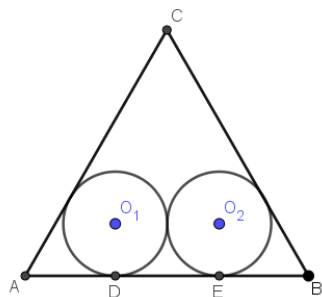
$$x^2 + y^2 = 4r^2, \text{ ebből } y = \frac{4r}{\sqrt{13}}, x = \frac{6r}{\sqrt{13}}. \text{ A négyzet oldalhossza } r \left(2 + \frac{12}{\sqrt{13}} \right).$$

Szabályos háromszög alapú kartondoboz

Pakoljuk most szabályos háromszög alapú kartondobozba a konzervdobozokat.

$n = 1$ esetén a kör a háromszög beírt köre, így a háromszög oldalhossza $a = 2\sqrt{3} \cdot r$

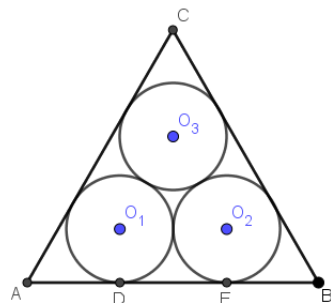
$n = 2$ esetén az elrendezés:



Az ADO_1 és BEO_2 háromszögek 30° - 60° - 90° szögekkel rendelkeznek, $AD = BE = r\sqrt{3}$, $DE = 2r$.

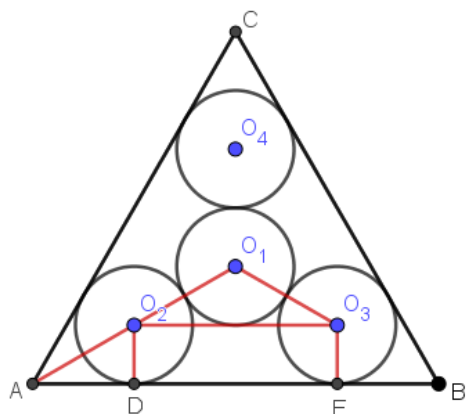
A szabályos háromszög oldalhossza $2r(1 + \sqrt{3})$.

$n = 3$ esetén az elrendezés:



Felhasználva $n = 2$ eset számolását a szabályos háromszög oldalhossza $2r(1 + \sqrt{3})$.

$n = 4$ esetén a legjobb elrendezés:



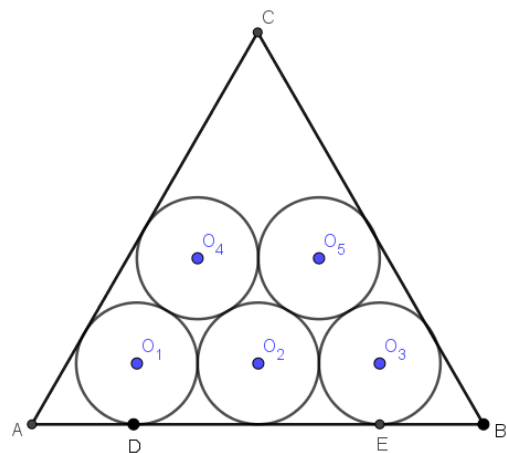
Az elrendezés forgásszimmetriája miatt az $O_1O_2O_3$ háromszög 120° -os szöggel rendelkező egyenlőszárú háromszög.

$$O_1O_2 = 2r, O_2O_3 = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 2r\sqrt{3}$$

Az ADO_2 és a BEO_3 háromszögek 30° - 60° - 90° szögekkel rendelkeznek, $AD = BE = r\sqrt{3}$.

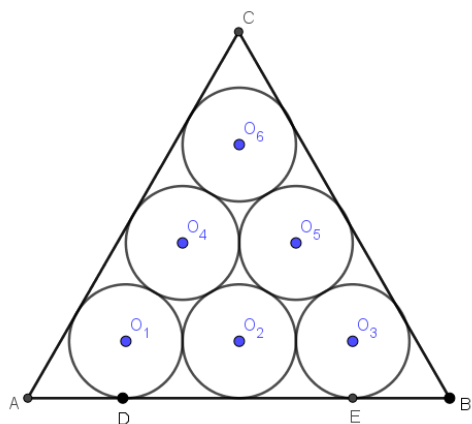
A szabályos háromszög oldalhossza $4r\sqrt{3}$.

$n = 5$ esetén egy jó elrendezés:



Az előző esetekhez hasonló számolással a szabályos háromszög oldalhossza $2r(2 + \sqrt{3})$

$n = 6$ esetén a jó elrendezés:



Az előző dobozba még egy konzervdoboz elfér. A szabályos háromszög oldalhossza most is $2r(2 + \sqrt{3})$.

Az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben, valamint az $n = 5$ és $n = 6$ esetekben ugyanakkora oldalhosszúságú szabályos háromszög jelenti az optimális dobozméretet. Erdős Pál és Norman

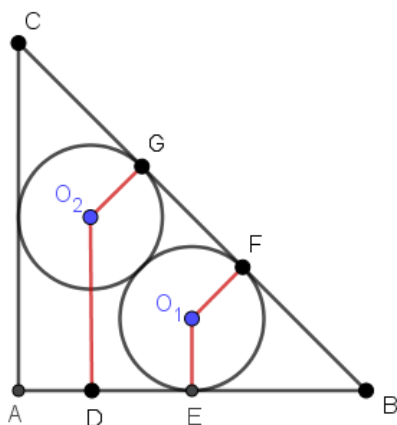
Oler sejtése szerint, ha n háromszögszám, akkor n db és $n - 1$ db kör azonos oldalhosszúságú szabályos háromszögbe pakolható be és az $n - 1$ körre az optimális pakolás úgy valósítható meg, hogy n kör „méhsejt” („hatszögletű”) pakolásából egy kört eltávolítunk. A sejtés $n \leq 15$ esetén igaz, nagyobb n -ekre még nem bizonyított.

Egyenlőszárú derékszögű háromszög alapú kartondoboz

A kartondobozok alaplaja legyen egyenlőszárú derékszögű háromszög. A legkisebb befogót keressük.

$n = 1$ esetén a kör a háromszög beírt köre, $r(2 + \sqrt{2})$ befogójú derékszögű háromszögbe írható r sugarú kör.

$n = 2$



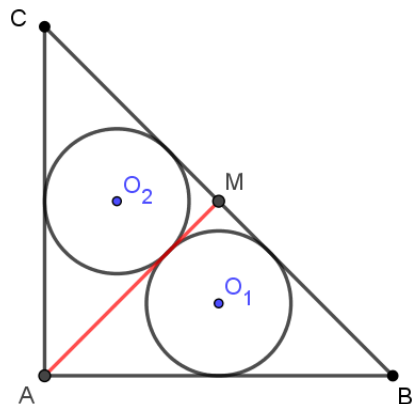
Felhasználjuk, hogy a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők és a háromszög átfogója a befogók $\sqrt{2}$ -szerese.

$$AD = r, DE = r\sqrt{2}, BE = x$$

$$BF = x = CG, FG = 2r$$

$$(r + r\sqrt{2} + x)\sqrt{2} = 2x + 2r, \text{ ebből } x = r(1 + \sqrt{2}) \text{ és a befogó } r(2 + 2\sqrt{2})$$

Egy másik lehetőség, hogy A pontból megrajzoljuk a két kör közös érintőjét. Ez a szimmetria miatt

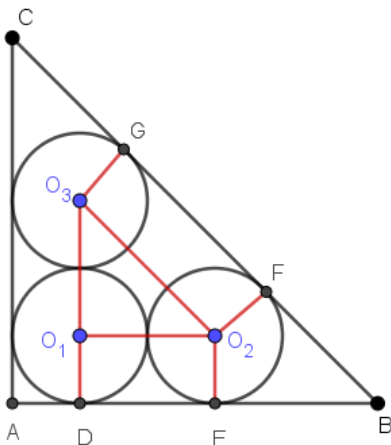


a BC átfogót a felezőpontban (M pont) metszi. Az ABM háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög. Jelölje b az $AB = AC$ szakaszok hosszát. $AM = BM = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Felhasználjuk, hogy derékszögű háromszögbe írt kör sugara fele akkora, mint a befogók összegének és az átfogónak a különbsége:

$$r = \frac{2 \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} - b}{2} = \frac{b(\sqrt{2}-1)}{2}, \text{ amiből rendezés után a befogó hossza } b = r(2 + 2\sqrt{2}).$$

$$n = 3$$

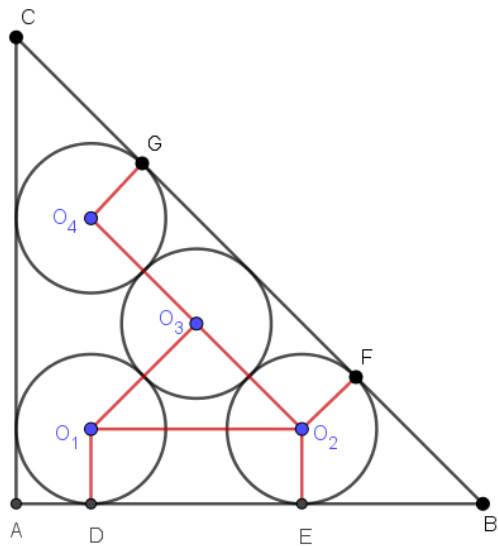
Az előző feladat első megoldásához hasonló gondolatmenettel



$$AD = r, DE = 2r, EB = BF = x, FG = 2r\sqrt{2} \text{ és}$$

$$(3r + x)\sqrt{2} = 2x + 2r\sqrt{2}, \text{ ebből } x = \frac{r\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2}, \text{ valamint a befogó } r(4 + \sqrt{2}).$$

$$n = 4$$

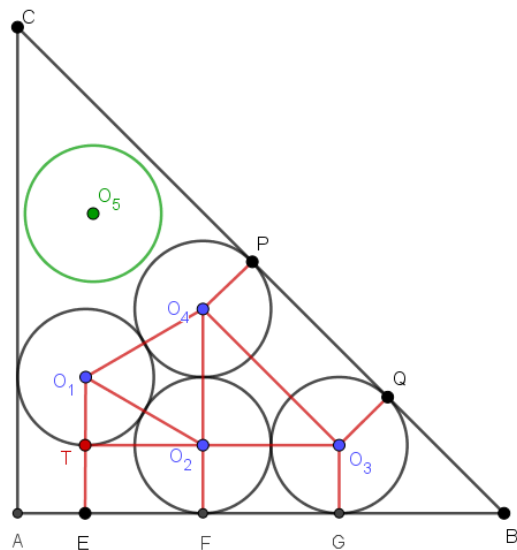


$$AD = r, \quad DE = 2r\sqrt{2}, \quad EB = BF = x,$$

$$FG = 4r$$

$$(r + 2r\sqrt{2} + x)\sqrt{2} = 2x + 4r, \text{ ebből } x = r(1 + \sqrt{2}), \text{ valamint a befogó } r(2 + 3\sqrt{2}).$$

$n = 5$

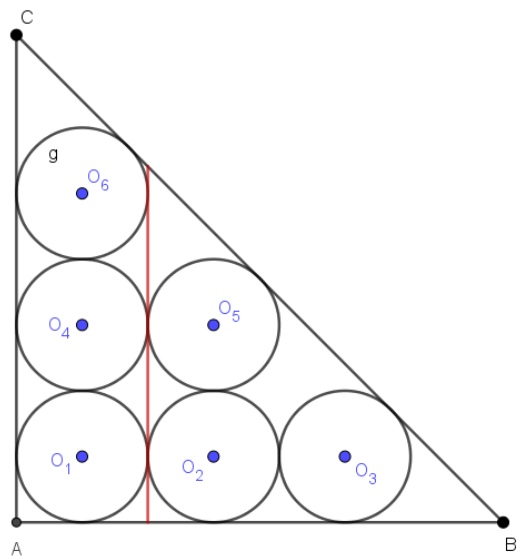


O_1TO_2 háromszög szögei 30° , 60° , 90° . $O_1O_2O_3$ háromszög szabályos, $O_2O_3O_4$ egyenlőszárú derékszögű háromszög. $GB = BQ = x$

$x = r(1 + \sqrt{2})$, hiszen $GBQO_3$ négyszög egybevágó az előző ábra $EBFO_2$ négyszögével és

$$AB = r(4 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$n = 6$



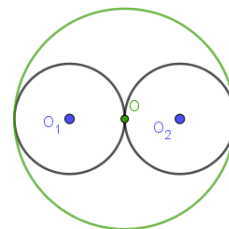
A háromszög befogójának hossza az $n = 3$ -ra kapott hosszából adódik: $r(6 + \sqrt{2})$.

Megjegyzés: ez a háromszög-elrendezés jelenik meg minden háromszögszám n érték esetén.

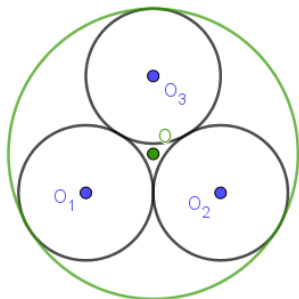
Kör alakú tálca

A konzervdobozokat kör alakú tálcára rakjuk a kartondobozból. Kérdés: mekkora legkisebb tálca sugara, amelyen elférnek a konzervdobozok (ha nem lehet őket egymásra pakolni)?

$n = 2$ esetén a tálca sugara az ábráról leolvasható, $R = 2r$.

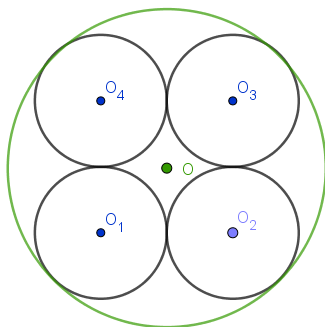


$n = 3$



Az $O_1O_2O_3$ szabályos háromszög oldalhossza $2r$, magassága $r\sqrt{3}$, a tálca O középpontja ennek a háromszögnek a súlypontja, így $R = r + \frac{2}{3}r\sqrt{3} = r \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

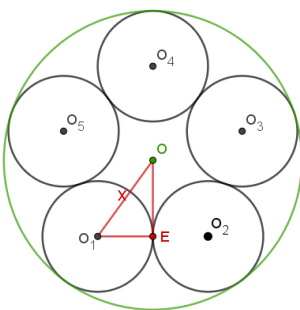
$n = 4$



Az $O_1O_2O_3O_4$ négyzet oldalhossza $2r$, átlója $2r\sqrt{2}$, a tálca sugara

$$R = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2})$$

$n = 5$



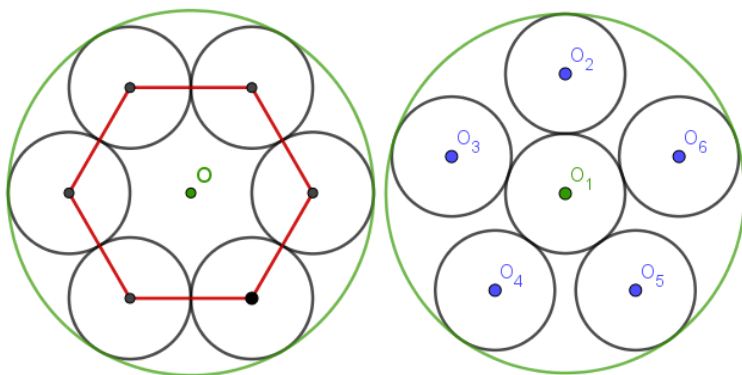
A konzervdobozok legjobb elhelyezése esetén azok középpontja egy szabályos ötszög csúcsaiban helyezkedik el. Jelölés $OO_1 = x$. O_1OE derékszögű háromszögben az O csúcsnál lévő szög 36° ,

$$\text{így } x = \frac{r}{\sin 36^\circ} = \frac{4r}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

$$\text{A tálca sugara } R = r + \frac{4r}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = r \left(1 + \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} \right).$$

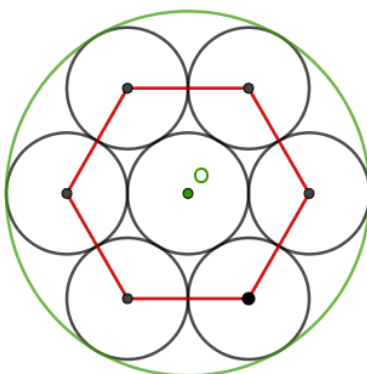
Megjegyzés: 1968-ban bizonyította R.L. Graham, hogy ez valóban az optimális elhelyezés.

$n = 6$



Két optimális elhelyezés is van: a hat konzervdoboz egy szabályos hatszög csúcsaiban helyezkedik el vagy egy szabályos ötszög csúcsaiban. A tálca sugara mindkét esetben $R = 3r$. R. L. Graham bizonyította 1968-ben, hogy nincs jobb elrendezés.

Könnyen látható, hogy az első elrendezés esetén még egy doboz elfér a tálcán, így $n = 7$ esetén is $R = 3r$ a megoldás.



Források:

Alfred S. Posamentier, Robert Geretschläger: The circle: a mathematical exploration beyond the line (2016, Prometheus Books)

[Circle packing - Wikipedia](#)

[Packomania](#)